

PHẦN GIẢI BÀI TẬP

CÂU 1

Xét chất khí lý tưởng lưỡng nguyên tử trong một xi lanh có pít tông chuyển động với tốc độ rất nhỏ so với tốc độ trung bình của các phân tử khí. Dùng thuyết động học phân tử của chất khí, hãy chứng minh hệ thức giữa áp suất và thể tích

$$PV^{\frac{7}{5}} = \text{const.}$$

Giả thiết rằng thành xi lanh và pít tông cách nhiệt, xét ở nhiệt độ không quá cao.

Bài giải

Chọn trục x trùng với trục của xi lanh. Ký hiệu u là tốc độ của pít tông trong xi lanh, v_x là thành phần x của vận tốc của phân tử khí đối với thành xi lanh. Xét hệ quy chiếu K chuyển động gắn với pít tông. Trong hệ quy chiếu này, thành phần x của phân tử khí đang xét là $v_x - u$. Theo thuyết động học phân tử, mọi va chạm của phân tử khí đều là va chạm đàn hồi. Khi phân tử va chạm với pít tông, thành phần x của vận tốc trong hệ quy chiếu K đổi dấu nhưng độ lớn không thay đổi. Do đó, vận tốc của phân tử sau va chạm trong hệ quy chiếu K là $-(v_x - u)$, còn đối với thành xi lanh, vận tốc đó là $-(v_x - u) + u = -v_x + 2u$. Thành phần y và z của vận tốc không thay đổi trong quá trình va chạm.

Động năng của phân tử thay đổi một lượng

$$\frac{1}{2}m(v_x - 2u)^2 - \frac{1}{2}mv_x^2 \approx -2mv_x u, \quad (1)$$

nếu ta bỏ qua số hạng chứa u^2 . Ở đây m là khối lượng của phân tử.

Ký hiệu V là thể tích khối khí, S là tiết diện ngang của xi lanh, N là số phân tử trong khối khí, $f(v_x)$ là hàm phân bố phân tử theo thành phần vận tốc v_x . Số phân tử trong khối khí có thành phần x của vận tốc nằm trong khoảng $(v_x, v_x + dv_x)$ là

$$dN = N f(v_x) dv_x.$$

Số phân tử có thành phần vận tốc nói trên va chạm với pít tông trong một đơn vị thời gian là

$$\frac{dN}{V} S v_x = \frac{N}{V} S v_x f(v_x) dv_x.$$

Biến thiên nội năng trong một đơn vị thời gian của khối khí là

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{2Nm u}{V} S \int_0^{\infty} v_x^2 f(v_x) dv_x = -\frac{Nm u}{V} S \overline{v_x^2} = -\frac{1}{3} \frac{Nm u}{V} S \overline{v^2}. \quad (2)$$

Theo định luật phân bố đều năng lượng theo bậc tự do, ta có

$$\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT \quad \rightarrow \quad kT = \frac{1}{3} m \overline{v^2} ,$$

$U = NL$ chuyển động tịnh tiến + NL chuyển động quay

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} N m \overline{v^2} + N kT \\ &= \frac{1}{2} N m \overline{v^2} + \frac{1}{3} N m \overline{v^2} = \frac{5}{6} N m \overline{v^2} . \end{aligned} \quad (3)$$

Theo phương trình cơ bản của thuyết động học phân tử ta có

$$PV = \frac{1}{3} N m \overline{v^2} = \frac{2}{5} U . \quad (4)$$

Mặt khác, $dV = S \, u \, dt$. Do đó từ (2) rút ra

$$dU = -\frac{1}{3} \frac{N m u}{V} S \overline{v^2} dt = -PV \frac{1}{V} dV = -P dV . \quad (5)$$

Lấy vi phân hai vế phương trình (4), kết hợp với (5), ta nhận được

$$d(PV) = -\frac{2}{5} P dV ,$$

$$\text{hay} \quad dP V + P dV = -\frac{2}{5} P dV . \quad (6)$$

Lấy tích phân hai vế của phương trình trên, ta rút ra

$$PV^{\frac{7}{5}} = \text{hằng số} . \quad (7)$$

CÂU 2

Cho một ống trụ bán kính R có chiều dài L rất lớn, đặt nằm ngang, có thể quay tự do quanh trục ống trụ với mô men quán tính I . Vật liệu chế tạo ống là chất cách điện và không từ tính. Một sợi dây không khối lượng quấn quanh ống trụ và treo vật khối lượng m . Tại thời điểm $t=0$ vật m được thả rơi từ trạng thái đứng yên.

- Xác định gia tốc góc và động năng của hệ sau khi vật m rơi được một khoảng h .
- Một lượng điện tích dương Q có khối lượng không đáng kể được phân bố đều trên bề mặt ống trụ trước khi thả vật m . Hãy xác định gia tốc góc và động năng của hệ sau khi vật m rơi được một khoảng h .
Hãy tính độ chênh lệch động năng của hệ giữa hai trường hợp $Q=0$ và $Q \neq 0$. Hãy cho biết tại sao có sự chênh lệch này.

Bỏ qua ma sát và sức cản của không khí.

Bài giải

- Ký hiệu α là gia tốc góc của ống trụ. Phương trình chuyển động của ống trụ là

$$I\alpha = TR, \quad (1)$$

trong đó T là sức căng của dây.

Phương trình chuyển động của vật m là

$$-T + mg = ma = m\alpha R. \quad (2)$$

Ở đây a ký hiệu gia tốc của vật, g là gia tốc trọng trường. Từ đó rút ra gia tốc góc là

$$\alpha = \frac{mgR}{I + mR^2}. \quad (3)$$

Động năng của hệ là

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m(\omega R)^2. \quad (4)$$

Ta có

$$h = \int_0^h dh = R \int_0^t \omega dt. \quad (5)$$

Mặt khác, ta có

$$\omega \alpha dt = \omega d\omega = d(\omega^2)/2 \quad \text{hay} \quad \omega dt = 1/(2\alpha) d(\omega^2). \quad (6)$$

Thay (6) vào (5), ta nhận được

$$h = R/(2\alpha) \omega^2 \quad \text{hay} \quad \omega^2 = 2\alpha h/R. \quad (7)$$

Thay (7) vào (4) và chú ý đến (3), ta có biểu thức cho động năng của hệ

$$K = \frac{1}{2} \left(I + mR^2 \right) \frac{2h}{R} \left(\frac{mgR}{I + mR^2} \right) = mgh. \quad (8)$$

Như vậy, động năng của hệ bằng biến thiên thế năng của vật khối lượng m. Đó chính là định luật bảo toàn năng lượng.

b. Khi ống trụ tích điện quay quanh trục của nó, ống trụ giống như một ống solenoid có dòng điện chạy trong đó. Từ trường trong lòng ống trụ là từ trường đều, hướng song song với trục ống trụ. Chia ống trụ thành các vành cùng có độ dày dx . Cường độ dòng điện chạy trong vành tại thời điểm t là

$$J(t) = \frac{Q}{2\pi R L} dx \cdot 2\pi R \frac{\omega}{2\pi} = \frac{Q\omega}{2\pi L} dx. \quad (9)$$

Từ trường trong lòng ống trụ có cảm ứng từ B

$$B = \mu_0 \frac{Q\omega}{2\pi L} dx \frac{L}{dxL} = \mu_0 \frac{Q\omega}{2\pi L}. \quad (10)$$

Ở đây $\omega \equiv \omega(t)$ là tốc độ góc tức thời tại thời điểm t .

Ống trụ quay với gia tốc góc $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$, do đó B tăng theo thời gian. Theo định

luật Faraday, trên mặt ống trụ xuất hiện điện trường E có phương tiếp tuyến với mặt trụ và vuông góc với trục ống trụ. Do đối xứng, điện trường E có độ lớn như nhau tại mọi điểm trên mặt trụ. Ta có

$$2\pi RE = -\frac{d}{dt}(B\pi R^2) = -\mu_0 \frac{QR^2}{2L} \frac{d\omega}{dt},$$

hay

$$E = -\frac{\mu_0 QR}{4\pi L} \alpha \quad (11)$$

Theo định luật Lenz, điện trường E tác dụng lên ống trụ mô men lực QER chống lại chuyển động quay của ống trụ. Phương trình chuyển động của ống trụ và của vật m là

$$I\alpha = TR + QER, \quad -T + mg = ma = m\alpha R \quad (12)$$

Từ đó rút ra

$$\alpha = \frac{mgR}{I + mR^2 + \mu_0 Q^2 R^2 / (4\pi L)} \quad (13)$$

Động năng của hệ được cho bởi biểu thức (4)

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m (\omega R)^2$$

Thay (7) và (13) vào (4), ta nhận được biểu thức cho động năng của hệ

$$K = mgh \frac{I + mR^2}{I + mR^2 + \mu_0 Q^2 R^2 / (4\pi L)} \quad (14)$$

So sánh (14) và (8), ta thấy trong trường hợp $Q \neq 0$, động năng của hệ giảm đi so với trường hợp $Q = 0$. Độ chênh lệch động năng giữa hai trường hợp là

$$\Delta K = K(Q=0) - K(Q) = mgh \frac{\mu_0 Q^2 R^2}{4\pi L [I + mR^2 + \mu_0 Q^2 R^2 / (4\pi L)]} \quad (15)$$

Năng lượng của từ trường là

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2\mu_0} B^2 \pi R^2 L = \frac{1}{2\mu_0} \left(\mu_0 \frac{Q^2}{2\pi L} \right)^2 \pi R^2 L \\ &= mgh \frac{\mu_0 Q^2 R^2}{4\pi L [I + mR^2 + \mu_0 Q^2 R^2 / (4\pi L)]} \end{aligned} \quad (16)$$

Như vậy, độ chênh lệch động năng ΔK đúng bằng năng lượng của từ trường, nghĩa là thế năng của vật m chuyển thành động năng của hệ và năng lượng của từ trường.

CÂU 3

Hai kính phân cực không hoàn hảo, giống hệt nhau, được đặt trên đường đi của chùm ánh sáng tự nhiên (ánh sáng phát ra bởi một vật bị đốt nóng). Khi hướng phân cực của hai kính song song với nhau, ánh sáng truyền qua hệ kính có cường độ gấp $\beta=10$ lần cường độ ánh sáng truyền qua khi hướng phân cực của hai kính vuông góc với nhau. Hãy xác định độ phân cực của ánh sáng đi qua

- a. từng kính phân cực riêng biệt.
- b. hệ hai kính, khi hướng phân cực của chúng song song với nhau.

Chú thích :

Độ phân cực P của ánh sáng được định nghĩa bởi biểu thức

$$P = \frac{|I_{\parallel} - I_{\perp}|}{|I_{\parallel} + I_{\perp}|},$$

trong đó I_{\parallel} và I_{\perp} lần lượt là cường độ ánh sáng có phân cực song song và vuông góc với hướng đã chọn.

Bài giải

Ta có thể xem ánh sáng tự nhiên như là tổng của hai thành phần có mặt phẳng dao động của véc tơ điện trường vuông góc với nhau và có cùng cường độ I_0 . Giả sử mỗi kính phân cực cho đi qua một phần α_1 ánh sáng có mặt phẳng dao động song song với hướng phân cực của kính, một phần α_2 ánh sáng có mặt phẳng dao động vuông góc với hướng phân cực của kính. Như vậy, cường độ ánh sáng đi qua cả hai kính phân cực là

$$I_{\parallel} = \alpha_1^2 I_0 + \alpha_2^2 I_0 \quad (1)$$

nếu hai kính có hướng phân cực song song với nhau, và

$$I_{\perp} = \alpha_1 \alpha_2 I_0 + \alpha_2 \alpha_1 I_0 = 2 \alpha_1 \alpha_2 I_0 \quad (2)$$

nếu hướng phân cực của hai kính vuông góc với nhau. Ta có

$$\frac{I_{\perp}}{I_{\parallel}} \equiv \frac{1}{\beta} = \frac{2\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \quad (3)$$

Do đó, giả thiết $\alpha_1 > \alpha_2$, ta rút ra

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \sqrt{\frac{\beta - 1}{\beta + 1}} \quad (4)$$

a. Độ phân cực của ánh sáng truyền qua từng kính riêng biệt là

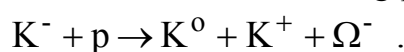
$$P = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \sqrt{\frac{\beta - 1}{\beta + 1}} = 0,905 \quad (5)$$

b. Nếu hướng phân cực của hai kính song song với nhau, ánh sáng truyền qua hệ hai kính có độ phân cực là

$$\begin{aligned} P &= \frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \\ &= \sqrt{\frac{\beta - 1}{\beta + 1}} \left(1 + \frac{2\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right) = \sqrt{\frac{\beta - 1}{\beta + 1}} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) = 0,995 \quad (6) \end{aligned}$$

CÂU 4

Hạt omega Ω^- mang điện tích âm được sinh ra trong phản ứng



Ở đây, K^- , K^+ và K^0 là các meson lần lượt mang điện tích âm, dương và trung hòa (gọi là các kaon); p là proton.

- a. Dựa trên biến đổi Lorentz đối với vận tốc, hãy dẫn ra công thức biến đổi đối với xung lượng và năng lượng

$$p_x = \gamma_0 \left(p'_x + E' \frac{V}{c^2} \right), \quad p_{y,z} = p'_{y,z}, \quad \frac{E}{c} = \gamma_0 \left(\frac{E'}{c} + p'_x \frac{V}{c} \right), \quad \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

trong đó \vec{p}, E và \vec{p}', E' là các đại lượng xét trong hệ quy chiếu S và S', hệ S' chuyển động với vận tốc V theo chiều dương của trục x trong hệ S.

- b. Hãy xác định xung lượng tối thiểu của hạt K^- trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm để phản ứng nói trên xảy ra, nếu hạt proton đứng yên trong phòng thí nghiệm.
- c. Giả thiết rằng hạt Ω^- được sinh ra trong phản ứng này khi hạt K^- có xung lượng tối thiểu. Hãy tính xác suất hạt Ω^- đi được 3cm trong phòng thí nghiệm trước khi phân rã, biết rằng thời gian sống của nó (trong hệ quy chiếu riêng) là $\tau = 1,3 \cdot 10^{-10}$ s.

Cho biết khối lượng nghỉ của K^-, K^+, K^0, Ω^- và p lần lượt là 494, 494, 498, 1675 và 938 MeV/c². Bỏ qua mọi tương tác của hạt Ω^- .

Bài giải

- a. Biến đổi Lorentz đối với vận tốc

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_{y,z} = \frac{v'_{y,z}}{\gamma_0 \left(1 + \frac{v'_x V}{c^2} \right)}.$$

Do đó

$$v^2 = \frac{(v'_x + V)^2 + (v'^2_y + v'^2_z) \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right)}{\left(1 + \frac{v'_x V}{c^2} \right)^2}.$$

Từ đó dễ dàng suy ra

$$\gamma = \gamma' \gamma_0 \left(1 + \frac{v'_x V}{c^2} \right),$$

trong đó $\gamma^{-1} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, $\gamma'^{-1} = \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}$. Ta có

$$p_x = m\gamma v_x = m\gamma \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}} = m\gamma (v'_x + V) \frac{\gamma' \gamma_0}{\gamma}$$

$$= \gamma_0 (m\gamma' v'_x + m\gamma' V) = \gamma_0 \left(p'_x + E' \frac{V}{c^2} \right) .$$

Tương tự, ta nhận được

$$p_{y,z} = m\gamma v_{y,z} = m\gamma \frac{v'_{y,z}}{\gamma_0 \left(1 + \frac{v'_x V}{c^2} \right)} = m\gamma v'_{y,z} \frac{\gamma'}{\gamma} = p'_{y,z} ,$$

$$\frac{E}{c} = m\gamma c = mc\gamma_0 \gamma' \left(1 + \frac{v'_x V}{c^2} \right) = \gamma_0 \left(\frac{m\gamma' c^2}{c} + m\gamma' v'_x \frac{V}{c} \right)$$

$$= \gamma_0 \left(\frac{E'}{c} + p'_x \frac{V}{c} \right) .$$

b. Ta có

$$p = \gamma_0 [p' + (V/c) (E'/c)] \quad , \quad E/c = \gamma_0 [E'/c + (V/c) p'] \quad , \quad (1)$$

trong đó p và E , p' và E' là xung lượng và năng lượng tổng cộng của hệ hai hạt trước phản ứng xét trong hệ quy chiếu phòng thí nghiệm S và hệ quy chiếu khối tâm S' , V là tốc độ của S' so với S . Ta có

$$p' = 0 \quad , \quad E' = \frac{E}{\gamma_0} = \sqrt{E^2 - (cp)^2} \quad , \quad \gamma_0^{-1} = \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c} \right)^2} \quad . \quad (2)$$

Để phản ứng có thể xảy ra, E' phải thỏa mãn điều kiện

$$E' \geq (m_{K^0} + m_{K^+} + m_{\Omega^-}) c^2 \quad . \quad (3)$$

Do đó

$$\sqrt{\left[\sqrt{m_{K^-}^2 c^4 + (pc)^2} + m_p c^2 \right]^2 - (pc)^2} \geq (m_{K^0} + m_{K^+} + m_{\Omega^-}) c^2$$

hay

$$T \geq \frac{\left[(m_{K^0} + m_{K^+} + m_{\Omega^-})^2 - (m_{K^-} + m_p)^2 \right] c^2}{2m_p} \quad . \quad (4)$$

Ở đây, T là động năng của kaon K^- . Thay giá trị khối lượng nghỉ của các hạt vào (4), ta nhận được

$$T \geq 2698 \text{ MeV} \quad . \quad (5)$$

Xung lượng p của hạt K^- liên hệ với động năng T bởi biểu thức

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{(T + m_{K^-} c^2)^2 - m_{K^-}^2 c^4} \quad . \quad (6)$$

Do đó xung lượng tối thiểu của hạt K^- là

$$p_{\min} = 3154 \text{ MeV}/c \quad . \quad (7)$$

c. Từ (1) suy ra tốc độ V của hệ S' đối với hệ S được cho bởi biểu thức

$$V = \frac{c^2 p}{\gamma_0 E'} = \frac{c^2}{E} p = c \frac{pc}{m_p c^2 + \sqrt{m_{K^-}^2 c^4 + (pc)^2}}$$

$$= 0,764 c \quad . \quad (8)$$

Tương ứng,

$$\gamma_0 = 1,55 \quad .$$

Tốc độ của hạt Ω^- trong hệ tọa độ phòng thí nghiệm bằng tốc độ của hệ S' đối với hệ S , tức là bằng V . Do đó, thời gian cần thiết để hạt Ω^- đi được quãng đường $d = 3\text{cm}$ trong phòng thí nghiệm là

$$t = \frac{d}{V} = 1,309 \cdot 10^{-10} \text{ s} \quad , \quad (9)$$

tương ứng với thời gian riêng của hạt Ω^- là

$$t_0 = \frac{t}{\gamma_0} = 0,845 \cdot 10^{-10} \text{ s} \quad . \quad (10)$$

Vậy xác suất hạt Ω^- đi được 3cm trong phòng thí nghiệm trước khi phân rã là

$$W = e^{-\frac{t_0}{\tau}} = 0,52 \quad . \quad (11)$$